Higher Frobenius-Schur indicators and quadratic Gauss sums

筑波大学数理物質科学研究科　　清水健一

概要

群論的と呼ばれるクラスの有限次元半単純 Hopf 代数の正則表現の Frobenius-Schur indicator の公式を紹介する. 我々は indicator の数論的性質を議論するが, その際に quadratic Gauss sum を効果的に用いることができる.

1 Frobenius-Schur indicators for Hopf algebras

まず Hopf 代数の定義から始める.

定義 1.1. 体 k 上の双代数 (bialgebra) とは, k-代数 (本稿においては, k 上の単位元を持つ結合的多元環を意味する) H と, 代数射 $\Delta : H \to H \otimes_k H$, $\varepsilon : H \to k$ の組 (H, Δ, ε) であって, 以下の条件を満たすものである: $x \in H$ に対し $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と書く. 任意の $x \in H$ に対し,

(i) 余結合律: $\sum \Delta(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = \sum x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)})$,
(ii) 余単位律: $\sum \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)} = x = \sum x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)})$.

さらに次の条件を満たす線形写像 $S : H \to H$ が存在するとき, H は Hopf 代数であるという: 上と同じ記法の元, 任意の $x \in H$ に対して,

(iii) $\sum S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1_H = \sum x_{(1)}S(x_{(2)})$.

Δ は余積 (comultiplication または coproduct), ε は余単位射 (counit), S は antipode と呼ばれる. なお, 双代数の antipode は存在すれば一意的である. 上で $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と書いたが, 条件 (i) を用いてこれを拡張し

$$\sum \Delta(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} = \sum x_{(1)} \otimes \Delta(x_{(2)})$$

と書く. 同様にして記号 $\sum x_{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{(n)}$ が定義される (Sweedler の記法).

例 1.1. 重要かつ簡単な例を 2 つ挙げる:

(a) 群 G の群環 kG は, 以下のような Hopf 代数構造を持つ:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1} \quad (g \in G).$$

(b) 有限群 G の上の関数環 $k^G := \mathrm{Map}(G, k)$ は, 以下のような Hopf 代数構造を持つ: まず $g \in G$ に対して, $e_g \in k^G$ を $e_g(x) = \delta_{g,x}$ $(x \in G)$ で定める. $\{e_g\}_{g \in G}$ は k^G の基底となっているが, この基底に関して

$$\Delta(e_g) = \sum_{x \in G} e_x \otimes e_{x^{-1}g}, \quad \varepsilon(e_g) = \delta_{g,1}, \quad S(e_g) = e_{g^{-1}} \quad (g \in G).$$

なお, ここでは詳しくは述べないが, 可換 Hopf 代数はアフィン群スキームと呼ばれるものと 1 対 1 に対応している (例えば Waterhouse の本などを見よ). Hopf 代数の公理は, アフィン群スキームの座標環の "非可換化" として理解できる. Hopf 代数の理論における定義は, 代数群などに由来するものが多い. 以下では Hopf 代数における積分の概念を定義するが, これはもともとは局所コンパクト群上の Haar 測度に由来する.

定義 1.2. Hopf 代数 H の**左積分**[*1](left integral in H) とは, 次の条件を満たす $t \in H$ である: 任意の $x \in H$ に対して, $x \cdot t = \varepsilon(x)t$.

積分について知られている事実をいくつか挙げておく. H を有限次元 Hopf 代数とする. このとき, H の左積分のなす空間 $\int_H$ は k 上 1 次元であることが知られている (積分の一意性). さらに, 次の条件が同値:

(i) H は半単純.
(ii) $t \in \int_H$ であって $\varepsilon(t) \neq 0$ であるものが存在する.

特に, H が半単純なら $\Lambda \in \int_H$ であって $\varepsilon(\Lambda) = 1$ となるものが一意的に存在する. この Λ のことを**正規化された左積分**と呼ぶ. 実際にいくつかの例で見てみよう:

例 1.2. G を有限群とする.

(a) $t = \sum_{g \in G} g \in kG$ は kG の積分である. $\varepsilon(t) = |G|$. したがって,

$$kG \text{ が半単純} \iff |G| \neq 0 \text{ in } k \iff k \text{ の標数は } |G| \text{ を割らない.}$$

これは, 良く知られた Maschke の定理である.

(b) $t = e_1 \in k^G$ は kG の積分である. $\varepsilon(t) = 1 \neq 0$ ゆえ, k^G は半単純である. もちろん, これは直接に分かる: k-代数として, k^G は k の $|G|$ 個の直積であり, これは半単純.

言葉の節約のため, 有限生成左 H-加群のことを単に H の表現ということにする. 一般に, H の表現 V に対し, その指標 $\chi_V : H \to k$ が有限群の指標と同様にして定義される. Linchenko-Montgomery [LM00] は, 半単純 Hopf 代数の指標の Frobenius-Schur indicator を正規化された積分を用いて定義した.

定義 1.3. H を有限次元半単純 Hopf 代数, $\Lambda \in H$ をその正規化された左積分とする. H の指標 χ の n-th Frobenius-Schur (FS) indicator $\nu_n(\chi)$ は

$$\nu_n(\chi) = \sum \chi(\Lambda_{(1)} \cdots \Lambda_{(n)})$$

で定義される (先に導入した Sweedler の記法を用いた). H の表現 V に対し, V の指標の n-th FS indicator を単に $\nu_n(V)$ で表す.

例 1.3. H が有限群 G の群環であるとき, 以上の定義を詳しくみてみよう. 今 kG には半単純であって欲しいので, k において $|G| \neq 0$ であると仮定しておく. このとき, $\Lambda := |G|^{-1} \sum_{g \in G} g$ は kG の積分で $\varepsilon(\Lambda) = 1$ を満たす. χ を G の指標とすると $\nu_n(\chi) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g^n)$. 右辺は有限群論における FS indicator の定義と一致する.

[*1] H の左積分といった場合, 線形写像 $\lambda : H \to k$ であって $\sum x_1 \lambda(x_2) = \lambda(x)1_H$ $(\forall x \in H)$ を満たすもののことを指す場合もある. H が有限次元 Hopf 代数の場合, その双対空間 $H^* := \mathrm{Hom}(H, k)$ は自然に Hopf 代数となるが, この条件を満たす線形写像 $\lambda : H \to k$ は定義の意味での left integral in H^* である. なお, もともとの Haar 測度の意味に近いのはむしろこの λ のほうである. コンパクト群 G 上の実数値連続関数のなす環 $H := R(G)$ は自然に $\mathbb{R}$ 上の Hopf 代数となる. G 上の Haar 測度は線形写像 $\lambda : R(G) \to \mathbb{R}$ を誘導するが, これは上の条件を満たす. 例えば [DNR01] の Chapter 4, 5 などに解説がある.

Hopf 代数 H の表現 V と W に対し, $V \otimes W := V \otimes_k W$ は

$$x \cdot (v \otimes w) := \sum x_{(1)} v \otimes x_{(2)} w \quad (x \in H; v \in V, w \in W)$$

によってまた H の表現となる．詳しくは後で述べるが, このテンソル積によって H の表現のなす圏は**モノイダル圏** (monoidal category) になる．本稿においては $\mathrm{Rep}(H)$ で H の表現のなすモノイダル圏を表す.

以降, H を標数 0 の代数閉体 k 上の有限次元半単純 Hopf 代数とする．H は H 自身に左からの積によって作用する．この表現は正則表現と呼ばれる．記号を流用し, H の正則表現の n-th FS indicator を $\nu_n(H)$ と書くことにする．この値 $\nu_n(H)$ は次のような興味深い性質を持つ:

(a) $\mathrm{Rep}(H)$ と $\mathrm{Rep}(L)$ が線形モノイダル圏として同値ならば, $\nu_n(H) = \nu_n(L)$.
(b) $\nu_n(kG) = \#\{g \in G \mid g^n = 1\}$.

(a) に関しては, 例えば, [Shi10a], [KMN09] などを見よ．これは $\nu_n(H)$ が H の表現のなすモノイダル圏の不変量であることを意味している．注意しておくと, H の表現のなすアーベル圏の不変量にはなっていない. 実際, D_8 を位数 8 の二面体群, Q_8 を同じ位数の四元数群とすると, $\mathbb{C}D_8$ と $\mathbb{C}Q_8$ は代数としては同型であるが, (b) から直ちに分かるように, それらの正則表現の ν_2 は異なる.

なお, このことは $\mathrm{Rep}(\mathbb{C}D_8)$ と $\mathrm{Rep}(\mathbb{C}Q_8)$ が線形モノイダル圏としては同値でないということを意味している．この事実自体は良く知られているが, 正則表現の Frobenius-Schur indicator による判定はその証明のなかで最も簡単なもののひとつであろう.

2 Group-theoretical Hopf algebras

群論的 (group-theoretical) と呼ばれるクラスの半単純 Hopf 代数を定義する．簡単のため, 以降は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える (実質的には, 標数 0 の代数閉体でよい)．より詳しくは, 例えば [ENO05] などを見よ.

Γ を有限群とする．Γ-**次数付きベクトル空間**とは, 単に分解

$$V = \bigoplus_{g \in \Gamma} V_g$$

が与えられているベクトル空間 V である．V_g のことを g-**成分**ということがある．Γ-次数付きベクトル空間の間の射とは, 各 $g \in \Gamma$ に対する g-成分を保つような線形写像 $f : V \to W$ である．有限次元 Γ-次数付きベクトル空間のなすアーベル圏を $\mathbf{Vec}^\Gamma$ で表す．さて, $V, W \in \mathbf{Vec}^\Gamma$ に対し,

$$(V \otimes W)_g := \bigoplus_{x \in \Gamma} V_x \otimes W_{x^{-1}g}$$

で $V \otimes W$ の g-成分を定義する．ここでモノイダル圏の定義を思い出そう:

定義 2.1. **モノイダル圏** (monoidal category) とは, 圏 $\mathcal{C}$ と双関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$, 自然な同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$$

の組 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ であって, 以下の条件を満たすものである:

(i) 五角形公理: 任意の $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対して次ページの図 1 が可換.
(ii) 三角形公理: 任意の X, Y に対して次ページの図 2 が可換.

$$
\begin{tikzcd}
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}\otimes \mathrm{id}_Z"'] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dd, "a_{W,X,Y\otimes Z}"] \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,X\otimes Y,Z}"'] & \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes a_{X,Y,Z}"'] & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}
$$

図 1　五角形公理

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

図 2　三角形公理

上において $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ は**単位対象**と呼ばれる．モノイダル圏の同値などの定義に関しては省略する．なお, 我々が考えているものはより詳しくは $\mathbb{C}$-線形モノイダル圏である．$\mathbb{C}$-線形な圏の間の関手, あるいは同値は, 暗黙に $\mathbb{C}$-線形であると仮定する．

さて, $\mathbf{Vec}^\Gamma$ の話に戻ろう．各 $g \in \Gamma$ に対し, E_g でその g-成分が $\mathbb{C}$ であり, 他の成分はすべて 0 であるような Γ-次数付きベクトル空間を表す．上で定義されたテンソル積により $\mathbf{Vec}^\Gamma$ は $\mathbf{1} = E_1$ を単位対象とするモノイダル圏となるのだが, そのために必要 a, l, r は一通りではない．例えば, まず l と r を

$$l_V : \mathbf{1} \otimes V \to V, \quad \lambda \otimes v \mapsto \lambda v; \qquad r_V : V \otimes \mathbf{1} \to V, \quad v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$$

によって定めておく．次に関数 $\omega : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ を用いて, a を

$$a_{U,V,W} : (u \otimes v) \otimes w \mapsto \omega(x, y, z) \cdot u \otimes (v \otimes w) \quad (u \in U_x, v \in V_y, w \in W_z).$$

によって定める．a は自然な同型ではあるが, 五角形公理や三角形公理を満たすとは限らない．公理を満たすための必要十分条件を ω を用いて記述しよう．

補題 2.1. 次は同値:

(i) $\mathbf{Vec}^\Gamma_\omega := (\mathbf{Vec}^\Gamma, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ がモノイダル圏.
(ii) ω は Γ の normalized 3-cocycle. すなわち

$$\omega(t, x, y)\omega(t, xy, z)\omega(x, y, z) = \omega(tx, y, z)\omega(t, x, yz), \quad \omega(x, y, 1) = \omega(x, 1, y) = \omega(1, x, y)$$

for all $t, x, y, z \in \Gamma$.

体 k 上の代数や余代数の概念は, 特定の図式を可換にするある線形写像の組として定義できる．以降, ω を Γ の normalized 3-cocycle とし, モノイダル圏 $\mathbf{Vec}^\Gamma_\omega$ を考える．まず, 通常の意味での代数をモデルとして, 一般のモノイダル圏における “代数” の概念を定義しよう．

定義 2.2. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ における代数 (algebra in $\mathcal{C}$) とは, $A \in \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の射 $m : A \otimes A \to A$, $u : \mathbf{1} \to A$ の組 $A = (A, m, u)$ であって, 以下の 2 つの図式を可換にするものである．

同様にして, $\mathcal{C}$ における代数 A 上の右加群, 左加群, 両側加群などが定義できる．加群の間の射も定義することができ, それをもって A-加群のなす圏が定義できる．もし $\mathcal{C}$ が coequalizer を持てば, 右 A-加群 N と左 A-加群 M の A 上のテンソル積 $N \otimes_A M$ を定義することができる．さらに, もし $\mathcal{C}$ のテンソル積が coequalizer を保てば, 両側 A-加群のなす圏はモノイダル圏になる．詳しくは, [Sch01] などを見よ．

(i) 結合律:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}_A"'] & & A\otimes(A\otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

(ii) 単位律:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes A \arrow[r, "l_A"] \arrow[dr, "u\otimes\mathrm{id}_A"'] & A & A\otimes\mathbf{1} \arrow[l, "r_A"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A\otimes u"] \\
& A\otimes A \arrow[u, "m"] &
\end{tikzcd}$$

さて, $\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma$ における代数を考えよう．とは言え, 一般にそのようなものを考えるのは難しいから, 以下で述べるような群環のようなもののみを考えることにする．F を Γ の部分群とする．E_x はベクトル空間としては $\mathbb{C}$ であったことに注意して,

$$A := \bigoplus_{x\in F} E_x, \quad u_x := 1 \in E_x \subset A \quad (x\in F)$$

とする．$\alpha : F\times F \to \mathbb{C}^\times$ を固定し, A 上の積を

$$u_x\cdot u_y := \alpha(x,y)u_{xy}$$

で定義し, 双線形に拡張する．この積によって引き起こされる写像を $m : A\otimes A \to A$ とする．さらに $u : \mathbf{1}\to A$ を, $u(\lambda) = \lambda u_1$ で定義する．m と u が $\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma$ の射であることはすぐにわかる.

補題 2.2. 以下は同値:

(i) 上の (A,m,u) は $\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma$ における代数.

(ii) α は normalized 2-cochain で $\omega|_{F\times F\times F} = \delta\alpha$, すなわち

$$\omega(x,y,z) = \alpha(x,y)\alpha(x,yz)^{-1}\alpha(xy,z)\alpha(y,z)^{-1}, \quad \alpha(1,x)=\alpha(x,1)=1$$

for all $x,y,z\in F$.

そこで, α は上の (ii) を満たすものとする.

定義 2.3. $\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma$ における両側 A-加群のなすモノイダル圏を $\mathcal{C}(\Gamma,\omega,F,\alpha)$ で表す．群論的モノイダル圏とは, このようにして構成されるモノイダル圏と (モノイダル圏として) 同値なものを言う．群論的 Hopf 代数とは, その表現のなす圏 $\mathrm{Rep}(H)$ が群論的であるような Hopf 代数である.

以上が群論的 Hopf 代数の定義である．なお, 上のようなデータ (Γ,ω,F,α) をとったとき, $\mathcal{C}(\Gamma,\omega,F,\alpha)\approx \mathrm{Rep}(H)$ となるような Hopf 代数 H が必ず存在するとは限らない．存在するための必要十分条件は Ostrik [Ost03] によって調べられている．なお, そのような準 Hopf 代数なら必ず存在する [ENO05].

$\omega\equiv 1$ のときは比較的分かりやすいので, 少し詳しく述べよう.

(a) $\mathrm{Rep}(\mathbb{C}^\Gamma)\approx \mathbf{Vec}^\Gamma \approx \mathcal{C}(\Gamma,1,1,1)$ である．これは明らかであろう.

(b) $\mathrm{Rep}(\mathbb{C}\Gamma)\approx\mathcal{C}(\Gamma,1,\Gamma,1)$ である．圏同値は以下のようにして与えられる: まず, $V\in\mathrm{Rep}(\mathbb{C}\Gamma)$ に対し, $\Phi(V) = V\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\Gamma$ とおくと, これは自然に $\mathbb{C}\Gamma$-bimodule となる．さらに $\Phi(V)_g := V\otimes g$ とおくことで, $\Phi(V)$ は Γ-graded. この対応は関手 $\Phi : \mathrm{Rep}(\mathbb{C}\Gamma)\to\mathcal{C}(\Gamma,1,\Gamma,1)$ を定めるが, 実はこれがモノイダル圏としての同値を与える.

(c) F と G を有限群として, Hopf 代数 $H = \mathbb{C}^G\otimes\mathbb{C}F$ を考える．これは簡単ではあるが, F と G が非可換であれば, 群環とも群上の関数環とも同型でない半単純 Hopf 代数になる．実は

$$\mathrm{Rep}(H)\approx\mathcal{C}(G\times F,1,F,1)$$

となる. 特に $F=1$ の場合が (a), $G=1$ の場合が (b) である.

期待されるとおり, $\mathbb{C}F$ や $\mathbb{C}^G$ は群論的である. 実は, 知られている多くの有限次元半単純 Hopf 代数は群論的である. 群論的ではない半単純 Hopf 代数が存在するかどうかは長らく問題であったが, 最近 Nikshych [Nik08] によってその存在が示された.

3 Formula for group-theoretical Hopf algebras

引き続き, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える.

定理 3.1. H を有限次元半単純 Hopf 代数であって, $\mathrm{Rep}(H)$ が $\mathcal{C}(\Gamma, \omega, F, \alpha)$ とモノイダル圏として同値であるようなものとする. このとき,

$$\nu_n(H) = \sum_{g \in \Gamma} \delta_{g^n,1} \prod_{k=1}^{n-1} \omega(g, g^k, g). \tag{1}$$

特に $\omega \equiv 1$ とすると, $\nu_n(\mathbb{C}G) = \#\{g \in G \mid g^n = 1\}$ が得られる. 証明の概略は以下の通りである:

(i) まず, あるクラス[*2]のモノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対する不変量 $\nu_n(\mathcal{C})$ を定義する [Shi10b]. 半単純 Hopf 代数 H の表現圏 $\mathrm{Rep}(H)$ はきちんとこのクラスに含まれており, さらに $\nu_n(\mathrm{Rep}(H)) = \nu_n(H)$ となる.
(ii) 一般にモノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対し, その Drinfeld center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ という組みひも圏が定義される. $\mathcal{C}$ が上のようなクラスのモノイダル圏であるとき, 各 $V \in \mathcal{C}$ に対してそのピボタル次元[*3]が定義できる. $\mathcal{C}$ のすべての単純対象のピボタル次元が実数[*4]ならば, $\nu_n(\mathcal{C})$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を用いて計算できる.
(iii) 一方で $\mathcal{C}(\Gamma, \omega, F, \alpha)$ の Drinfeld center は $\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma$ のそれと同値であることが知られている. (両側加群のなす圏の Drinfeld center に関する Schauenburg の結果 [Sch01] の応用.)
(iv) したがって $\nu_n(\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma)$ を計算すればよい. 定義に基づいて直接計算すると, 上の結果が得られる.

以上の (i) と (ii) では, Ng と Schauenburg によるあるクラスのモノイダル圏の対象に対する FS indicator の理論が本質的な役割を果たす ([NS07a], [NS07b], [NS08] など). なお, (1) の右辺が初めて現れたのは, Altschüler-Coste の論文 [AC93] であろう. 彼らはレンズ空間 $L(n,1)$ の Dijkgraaf-Witten 不変量として同じ式を得ている. 同論文の appendix には様々な 3-cocycle に関する等式があるが, それらを用いると以下のようなことが分かる.

補題 3.1. $\widetilde{\omega}_n(g) := \delta_{g^n,1} \prod_{k=1}^{n-1} \omega(g, g^k, g)$ とおく.

(a) $\widetilde{\omega}_n(g)$ の値は, ω の $\langle g \rangle$ への制限のコホモロジー類による.
(b) $\widetilde{\omega}_n$ は Γ の類関数である: $\widetilde{\omega}_n(xgx^{-1}) = \widetilde{\omega}_n(g)$.

Remark 3.1. 証明の概略の (ii) で触れている仮定を $\mathcal{C}$ が満たすとき, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は modular tensor category と呼ばれる非常に多くの構造を持つモノイダル圏となり, さらに $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ から閉 3 次元多様体の不変量 $\mathbf{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}$ を

[*2] 詳しく言えばピボタル構造を持つ fusion category [ENO05].
[*3] ピボタル次元は $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ の元として定義される. 今の状況下では, $\mathrm{End}(\mathbf{1}) \cong \mathbb{C}$ のもとで円分整数になる [Shi10b].
[*4] 複素数体上のピボタル構造を持つ fusion category に対しては, spherical 条件 [BW99] と同値. なお, spherical 条件自体はかなり一般的な状況で定義され, 基礎体が複素数体である必要はない. しかし, 群論的圏が spherical なピボタル構造を許容することを示すために, 実数体を本質的に用いて議論しているところがあり, そのために複素数体上で考えている. この問題点は, 恐らく, すべての議論を準 Hopf 代数の構造論に帰着させることによって解決でき, 一般の標数 0 の代数閉体上でこの定理は成立するだろう.

構成できる (Reshetikhin-Turaev 不変量 [BK01]). 我々が求めたい正則表現の FS indicator は, 実はレンズ空間 $L(n,1)$ の Reshetikhin-Turaev 不変量に一致する[*5]: $\nu_n(\mathcal{C}) = \mathbf{RT}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}(L(n,1))$.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Gamma, \omega, F, \alpha)$ が群論的であるとき, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{Z}(\mathbf{Vec}_\omega^\Gamma)$ と同値であるという事実を上では使っているが, 後者は (従って両者は) twisted Drinfeld double と呼ばれる準 Hopf 代数 $D^\omega(\Gamma)$ の表現のなす圏と同値であることが知られている. $D^\omega(\Gamma)$ の表現のなす圏から構成される Reshetikhin-Turaev 不変量が, 同じデータ (Γ, ω) から構成される Dijkgraaf-Witten 不変量と一致することは佐藤・和久井 [SW02] によって示されている. このような背景から見ると, 我々の公式が既に閉 3 次元多様体の Dijkgraaf-Witten 不変量の研究において現れているということは全く不思議なことではない.

4 Arithmetic properties of indicators

以降では, 群論的 Hopf 代数 H に対する $\nu_n(H)$ の数論的性質を議論したい. 前述の結果から, 一般に Γ を有限群, ω をその normalized 3-cocycle として, 以下のような和の性質を調べることに帰着する:

$$\nu_n(\Gamma, \omega) := \sum_{g \in \Gamma} \widetilde{\omega}_n(g), \quad \widetilde{\omega}_n(g) := \delta_{g^n,1} \prod_{k=1}^{n-1} \omega(g, g^k, g).$$

まず, $\Gamma = \mathbb{Z}_N$ のときに, 上の関数 $\widetilde{\omega}_n$ について詳しく調べよう.

補題 4.1. $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_N, \mathbb{C}^\times)$ の位数を e とする. n を自然数, $i \in \mathbb{Z}_N$ を $ni = 0$ を満たす元とする. このとき:

(a) $\widetilde{\omega}_n(i)$ は 1 の冪根で, その位数は N, n, e のすべてを割り切る.
(b) $\widetilde{\omega}_n(ai) = \widetilde{\omega}_n(i)^{a^2}$ $(a \in \mathbb{Z}_N)$.

Proof. Moore-Seiberg [MS89, Appendix E] によれば, $H^3(\mathbb{Z}_N, \mathbb{C}^\times)$ は

$$\psi_N(j,k,l) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} \cdot \bar{j}(\bar{k} + \bar{l} - \overline{k+l}) \right) \quad (j,k,l \in \mathbb{Z}_N), \tag{2}$$

によって生成される位数 N の巡回群である. ここで, 整数 a に対し, $\bar{a}$ で 0 以上 $N-1$ 以下の a と N を法として合同な唯一の整数を表した. さて, 先に注意したことから, 関数 $\widetilde{\omega}_n$ は ω のコホモロジー類による. したがって $\omega = \psi_N^r$ ($r = (N/e) \cdot s$; s は N と互いに素な整数) としてよい. このとき具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_n(i) &= \exp\left(\frac{2\pi r\sqrt{-1}}{N^2} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{i}(\bar{i} + \overline{ki} - \overline{(k+1)i}) \right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi r\sqrt{-1}}{N} \cdot n(\bar{i})^2 \right) \\
&= \exp\left(\frac{2\pi s\sqrt{-1}}{e} \cdot \frac{n(\bar{i})^2}{N} \right).
\end{aligned}$$

[*5] 余談であるが, [Shi10a] で定義している有限次元 Hopf 代数に対するモノイダル森田不変量は, 半単純 Hopf 代数の Drinfeld double の表現のなす圏からの Reshetikhin-Turaev 不変量の構成を, 一般の半単純とは限らない有限次元 Hopf 代数に対して無理矢理に適用することで得られたものである. もっとも, 得られたそれが, もはや多様体論に応用可能なものなのか, 何か幾何学的な意味を持つものなのかどうかは定かではない (恐らく, そうではないだろう).

$L(n,1)$ を他の閉 3 次元多様体に変えるということも当然考えられる. その試みは, [Shi10a] で示しているように, 少なくとも有限群の群環に対しては非常に上手くいく. 一般の場合は計算の困難さが立ちはだかる. 非常に naive な言い方ではあるが, Hopf 代数の取り扱いやすいモノイダル森田不変量は, 取り扱いやすい多様体から得られるようである.

初等整数論を用いた簡単な議論により, $\bar{i}$ を i に置き換えても良いことが分かる. よって,

$$\widetilde{\omega}_n(i) = \exp\left(\frac{2\pi s\sqrt{-1}}{e} \cdot \frac{ni^2}{N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi s\sqrt{-1}}{n} \cdot \frac{n^2 i^2}{Ne}\right).$$

を得た. もはや (b) は明らかであろう. e は N の約数であることに注意せよ. (a) は, $ni \equiv 0 \pmod N$ の仮定の下, ni^2/N も $n^2 i^2/eN$ も整数であることから従う. □

補題 4.2. 記号は上の通り. さらに $S = \sum_{i\in\mathbb{Z}_N} \widetilde{\omega}_n(i)$ とする.

(a) $\omega = (\psi_N)^r$ in $H^3(\mathbb{Z}_N, \mathbb{C}^\times)$ とする. このとき, $S = S(nr/d, d)$. ここに, d は N と n の最大公約数, $S(a, m)$ は以下で与えられる "quadratic Gauss sum":

$$S(a, m) := \sum_{i=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} \cdot ai^2\right) \quad (a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}).$$

(b) ω のコホモロジー類の位数を e とする. ある整数 a と d と e の公約数 c が存在して $S = (d/c) \cdot S(a, c)$.

なお, (a) は Altschüler and Coste [AC93, (3.18)] によって示されている.

Proof. 合同式 $ni \equiv 0 \pmod N$ の解は $i = (N/d) \cdot j$ $(j = 0, 1, \cdots, d-1)$ である. 補題 4.1 (b) より

$$S = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{\omega}_n(j \cdot N/d) = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{\omega}_n(N/d)^{j^2}. \tag{3}$$

(a) 補題 4.1 の証明より, $\widetilde{\omega}_n(N/d) = \exp(2\pi\sqrt{-1} \cdot nr/d^2)$. $S(a, m)$ の定義より明らか.
(b) c を $\widetilde{\omega}_n(N/d)$ の位数とする. 補題 4.1 (a) より, c は d と e の公約数である.

$$\widetilde{\omega}_n(N/d) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{c} \cdot a\right)$$

を満たす $a \in \mathbb{Z}$ をとる. 式 (3) より残りは明らか. □

さて, 一般の Γ と ω に戻ろう. 以前に $\widetilde{\omega}_n(g)$ の値は実際には ω の $\langle g \rangle$ への制限のコホモロジー類によることを注意した. どんな有限群もその巡回部分群の和集合であるから, 上の補題は和 $\nu_n(\Gamma, \omega)$ を調べるために非常に有効である.

例 4.1. 例えば, p を奇素数とし, Γ を位数 p^k の群とする. $C_1, \cdots, C_m$ を Γ の巡回部分群であって, その位数が n の約数であるようなものとする. Γ の部分集合 X に対し $W_n(X) := \sum_{g\in X} \widetilde{\omega}_n(g)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\nu_n(\Gamma, \omega) &= W_n(\{g \in \Gamma \mid g^n = 1\}) = W_n(C_1 \cup \cdots \cup C_m) \\ &= \sum_{t=1}^{m} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_t} (-1)^{t-1} \cdot W_n(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_t}).\end{aligned}$$

上の補題より, $W_n(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_t})$ は $S(a, p^r)$ の形である.

$$p_* := \begin{cases} +p & \text{if } p \equiv 1 \pmod 4, \\ -p & \text{if } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

とおく. ガウス和に関する結果を用いると, $S(a, p^r) \in \mathbb{Z}[\sqrt{p_*}]$ が分かる. 上の式より, $\nu_n(\Gamma, \omega) \in \mathbb{Z}[\sqrt{p_*}]$.

詳しくは証明しないが, 上記のような考察を推し進めることで, 一般には以下のようなことがわかる．各 $g \in \Gamma$ に対し, ω の g の生成する巡回部分群への制限を ω_g と書く．そして $c(\omega) \in \mathbb{N}$ を

$$c(\omega) := \mathrm{lcm}\left\{\text{the order of } \omega_g \in H^3(\langle g \rangle, \mathbb{C}^\times) \mid g \in \Gamma\right\}.$$

で定める．ここで, lcm は最小公倍数を意味する.

定理 4.1 ([Shi10b, Lemma 4.8])**.** $m \in \mathbb{N}$ に対し, $R(m)$ を $S(a,d)$ $(d \mid m,\ 0 < a < d)$ で生成される $\mathbb{C}$ の部分環とする．そのとき, $\nu_n(\Gamma,\omega) \in R(m)$ where $m = \gcd(c(\omega), n))$.

特に, $c(\omega) = 2$ なら $\nu_n(\Gamma,\omega) \in R(2) = \mathbb{Z}$ である．一般に, $c(\omega)$ は ω のコホモロジー類の位数と Γ の exponent の公約数であることが示せる．$c(\omega)$ は一般には ω のコホモロジー類の位数とは異なるはずであるが, そのような具体例を筆者は知らない.

講演では触れることが出来なかったが, 応用として, 例えば:

定理 4.2 ([Shi10b, Proposition 4.11])**.** K を $\nu_n(\Gamma,\omega)$ $(n \in \mathbb{Z})$ で生成される体とする．このとき, $K/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であり, $K \neq \mathbb{Q}$ のとき, 対応するガロア群は位数 2 の巡回群の有限個の直積と同型になる.

5 Frobenius theorem

講演では全く触れることができなかったが, 以上のような数論的性質を議論しようと考えたのは, 次のような問題への関心があったからである．まず, 有限群論における Frobenius の定理を思い出そう．G を有限群とする．もし n が $|G|$ の約数ならば, $g^n = 1$ を満たす G の元 g の数は n で割り切れる．そのような元の数はちょうど $\nu_n(\mathbb{C}G)$ と一致することに注意しよう．正則表現の FS indicator を用いることで, 問題は次のように一般化される.

問題 5.1. H を有限次元半単純 Hopf 代数, n を $\dim(H)$ の約数とする．$\dfrac{\nu_n(H)}{n}$ は代数的整数だろうか？

このような可除性の問題に関してはほとんど調べられていないようであり, 完全な解答はまだ得られていない．なお, 準 Hopf 代数に対しては成り立たない例がある．[Shi10b] では具体的な計算によって多くの場合に上の主張が正しいということを確認するとともに, 以下のような部分的な回答を得た.

定理 5.1. H を群論的 Hopf 代数であって, $\mathrm{Rep}(H)$ が $\mathcal{C}(\Gamma,\omega,F,\alpha)$ と同値であるようなものとする.

(a) $c(\omega) = 1$ ならば, 任意の n に対して $\nu_n(H) = \#\{g \in \Gamma \mid g^n = 1\}$.
(b) $c(\omega) = 2$ ならば, $\dim(H)$ の任意の約数 n に対し, $\nu_n(H)$ は n で割り切れる.
(c) $c(\omega) = p$ が奇素数ならば, $\dim(H)$ の任意の約数 n に対し, $\nu_n(H)\sqrt{p}$ は n で割り切れる.

この定理の証明は, 群論的 Hopf 代数に対する公式, 前章で用いたようなガウス和の性質, さらに有限群に対する Frobenius の定理などを用いた非常に組み合わせ的なものであり, 一般化できるようなものではないため, 今後より良い証明を考えていく必要がある．実は H が Hopf 代数であるということすら使われてはいない．H が Hopf 代数である場合には, 対応するデータ (Γ,ω,F,α) に相応の制限がつくため, 上の定理はまだ改良の余地があると考えられる.

この応用として:

定理 5.2. 半単純 Hopf 代数 H が可換 Hopf 代数の指数 2 の拡大として記述されていると仮定すると, H は群論的であり, さらに対応する ω は $c(\omega) = 2$ を満たすことが示せる (したがって $\nu_n(H) \in \mathbb{Z}$ となっていることも分かる). したがって, 上の定理より, $\dim(H)$ の任意の約数 n に対して $\nu_n(H)$ は n で割り切れる.

参考文献

[AC93] Daniel Altschüler and Antoine Coste. Invariants of three-manifolds from finite group cohomology. *J. Geom. Phys.*, 11(1-4):191–203, 1993. Infinite-dimensional geometry in physics (Karpacz, 1992).

[BK01] Bojko Bakalov and Alexander Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[BW99] John W. Barrett and Bruce W. Westbury. Spherical categories. *Adv. Math.*, 143(2):357–375, 1999.

[DNR01] Sorin Dăscălescu, Constantin Năstăsescu, and Şerban Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2001. An introduction.

[ENO05] Pavel Etingof, Dmitri Nikshych, and Viktor Ostrik. On fusion categories. *Ann. of Math. (2)*, 162(2):581–642, 2005.

[KMN09] Yevgenia Kashina, Susan Montgomery, and Siu-Hung Ng. On the trace of the antipode and higher indicators. *arXiv:0910.1628*, 2009.

[LM00] V. Linchenko and S. Montgomery. A Frobenius-Schur theorem for Hopf algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 3(4):347–355, 2000.

[MS89] Gregory Moore and Nathan Seiberg. Classical and quantum conformal field theory. *Comm. Math. Phys.*, 123(2):177–254, 1989.

[Nik08] Dmitri Nikshych. Non-group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories. *Selecta Math. (N.S.)*, 14(1):145–161, 2008.

[NS07a] Siu-Hung Ng and Peter Schauenburg. Frobenius-Schur indicators and exponents of spherical categories. *Adv. Math.*, 211(1):34–71, 2007.

[NS07b] Siu-Hung Ng and Peter Schauenburg. Higher Frobenius-Schur indicators for pivotal categories. In *Hopf algebras and generalizations*, volume 441 of *Contemp. Math.*, pages 63–90. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[NS08] Siu-Hung Ng and Peter Schauenburg. Central invariants and higher indicators for semisimple quasi-Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(4):1839–1860, 2008.

[Ost03] Viktor Ostrik. Module categories over the Drinfeld double of a finite group. *Int. Math. Res. Not.*, (27):1507–1520, 2003.

[Sch01] Peter Schauenburg. The monoidal center construction and bimodules. *J. Pure Appl. Algebra*, 158(2-3):325–346, 2001.

[Shi10a] Kenichi Shimizu. Monoidal morita invariants for finite group algebras. *J. Alg.*, (323):397–418, 2010.

[Shi10b] Kenichi Shimizu. Some computations of Frobenius-Schur indicators of the regular representations of Hopf algebras. *arXiv:1002.4086*, 2010.

[SW02] Nobuya Sato and Michihisa Wakui. (2+1)-dimensional topological quantum field theory with a Verlinde basis and Turaev-Viro-Ocneanu invariants of 3-manifolds. In *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001)*, volume 4 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 281–294 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.