ジョンソン・スキームの隣接代数のモジュラー表現について

信州大学総合工学系研究科 前川　悠
E-mail:maekawa@math.shinshu-u.ac.jp

1　序文

アソシエーション・スキームは, 代数的組み合せ論の主要な研究対象である。アソシエーション・スキームから自然と隣接代数と呼ばれる代数を得ることが出来る。この隣接代数を組合せ論の特徴を生かした方法で表記したい。

実際, アソシエーション・スキームの特徴的な一例である, ハミング・スキームの隣接代数に関しては吉川昌慶氏が完全に分類をした。私はジョンソン・スキームと呼ばれるアソシエーション・スキームのハミングとは別の特徴的な一例に関して同じような研究を行ってきた。修士の 2 年間では完全に解決するとまではいかなかったが, 隣接代数の特徴付けに必要になりそうな写像をいくつか見つけることができたので, それを紹介する。

その準備として第 3 章にて, アソシエーション・スキーム, 第 4 章にてジョンソン・スキームの定義と基本事項を述べる。アソシエーション・スキームの表現は隣接代数の線型表現のことであり, 有限群の表現と同じように係数体の標数によって通常表現とモジュラー表現の 2 種類に分けることができる。通常表現とは多元環の係数体の標数が 0 の場合の表現で, 係数体の標数が 0 のアソシエーション・スキームの隣接代数は半単純であることが知られている。しかし, 一般に正標数 p の係数体上のアソシエーション・スキームの隣接代数は半単純とは限らない。そこで, 私はいつ, アソシエーション・スキームの隣接代数が半単純になるかが知りたい。この研究はその足がかりである。

2　記号と定義

次の定理は主定理を示すために必要である。そのために二項係数を拡張しておく。

定義 2.1. [1] m, n を自然数とする。この時二項係数 $\binom{m}{n}$ を以下のように定義する。

$$\binom{m}{n} := \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$$

注意 . 上の定義にすると, $n=0$ の時 $\frac{0!}{0!}=1,\ n>m$ の時, $\frac{n(n-1)\cdots 0\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$ となり, $n \leq m$ に定義されていた二項定数が n, m が自然数の範囲まで拡張できた。

定理 2.2. [1] p を素数とし、$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k,\ n = b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k\ (0 \leq a_i, b_i < p, \quad i \in \{0, \cdots, k-1\})$ とする。この時

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{a_i}{b_i}\ (mod\ p)$$

となる。

3　アソシエーション・スキーム

X を有限集合とする。$X \times X$ の部分集合を X 上の関係という。X 上の関係 s に対して

$$s^* = \{(y, x) \mid (x, y) \in s\}$$

とおく。関係 s に対して、その**隣接行列**を σ_s で表す。すなわち σ_s は行、列、共に集合 X で添え字付けられた行列で、その (x, y)-成分は $(x, y) \in s$ の時 1, $(x, y) \notin s$ の時 0 と定めたものである。明らかに $\sigma_{s^*} = {}^t\sigma_s$ である。

定義 3.1. [2] S を X 上のいくつかの空でない関係の集合とする。(X, S) がアソシエーション・スキームであるとは

(1) S は $X \times X$ の分割。すなわち $X \times X = \bigcup_{s \in S} s$ であり, 任意の $s \in S$ は空でなく，$s, t \in S$ に対して s と t とが一致していなければ s と t との共通部分は空である。

(2) S には, $1 := \{(x, x) | x \in X\}$ という元が存在する。

(3) S の元 s が存在すれば，s^* も S に存在する。

(4) $i, j, k \in S$ に対して $(x, y) \in k$ ならば $p_{ij}^k = |\{z \in X | (x, z) \in i, (z, y) \in J\}|$ は $(x, y) \in k$ の取り方によらず一定である。

以上を満たすこととする。

また、上の条件は隣接行列を使って書き直すことが出来る。

定義 3.2. [2]

(1)' $\sum_{s \in S} \sigma_s = J$, かつ任意の $s \in S$ に対して $\sigma_s \neq 0$　(J はすべての成分が 1 である行列)

(2)' ある $1 \in S$ があって $\sigma_0 = I$

(3)' $s \in S$ ならば $s^* \in S$

(4)' ある非負整数 $\{p_{st}^u | u \in S\}$ があって $\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} p_{st}^u \sigma_u$

アソシエーション・スキーム (X,S) に対して、$S=\{1=s_0,s_1,\cdots s_d\}$ とする。このとき、

$$R := \sum_{i=0}^{d} i\sigma_{s_i}$$

と R を定義し、この R をアソシエーション・スキーム (X,R) の**関係行列**と呼ぶ。関係行列はアソシエーション・スキームを具体的に記述するときに重宝する。

例 1. G を有限群とし, f をその正則右置換表現とする。すなわち,

$$f:\mathbb{Z}G\to M_{|G|}(\mathbb{Z})\quad \left(f(s)=\begin{cases}1 & xs=y\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\right)$$

と定める。 $f(s)$ を隣接行列とする G 上の関係を, 同じ記号を用いて s と表すことにする。このとき (G,G) はアソシエーション・スキームである。

この例を見てわかるようにアソシエーション・スキームは有限群の一般化として見る事が出来る。

アソシエーション・スキーム の条件 $(4)'$ から

$$\mathbb{Z}S=\bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z}\sigma_s$$

は環になる。単位元 1 を持つ可換環 R に対して

$$RS=\mathbb{Z}S\otimes_{\mathbb{Z}}R$$

は R-代数となる。これを S の R 上の**隣接代数**という。これは σ_s を R を成分とする行列と見て, $\{\sigma_s \mid s\in S\}$ の生成する行列環が RS である。また、$\{\sigma_s \mid s\in S\}$ は RS の R-基底となっている。このことより、隣接代数 RS は有限次元である。$\mathbb{Z}S$ が可換環のとき, すなわち $p_{st}^u=p_{ts}^u$ が任意の $s,t,u\in S$ について成り立つとき, アソシエーション・スキーム (X,S) は**可換**であるという。可換なアソシエーション・スキームから得られる隣接代数は可換環となる。また、任意の $s\in S$ について $s^*=s$ であるとき (X,S) は**対称**であるという。 アソシエーション・スキームの表現とは, その隣接代数の表現のことをいう。特に複素数体 $\mathbb{C}$ 上の隣接代数については以下のことが言えている。

定理 3.3. アソシエーション・スキーム (X,S) の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数 $\mathbb{C}S$ は半単純代数である。

4 ジョンソン・スキーム

さて、次に今回の研究対象である「ジョンソン・スキーム」を定義する。

定義 4.1 (ジョンソン・スキーム). [2] $\Omega = \{1, 2, \cdots, m\}$ とし，n を $n \leq \frac{m}{2}$ となる自然数とする。X を Ω の n-部分集合全体の集合とする。

$$s_i = \{(x, y) \mid n - |x \cap y| = i\}$$

として X 上の関係 s_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ を定義する。この時 $(X, \{s_i \mid i = 0, 1, \cdots n\})$ は アソシエーション・スキーム となる。これをジョンソン・スキーム といい $\mathrm{J}(m, n)$ と書く。

注意 . $n \leq \frac{m}{2}$ と仮定しなくてもジョンソン・スキームは定義できるが, $\mathrm{J}(m, n)$ と $\mathrm{J}(m, m - n)$ はアソシエーション・スキームとして本質的に同じものであるので $0 < n \leq \frac{m}{2}$ という仮定をしても一般性を失わない。

例 2. $\mathrm{J}(5, 2)$ の関係行列は以下の通りである。

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \end{array} \\
\begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 34 \\ 35 \\ 45 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

ジョンソン・スキームには隣接行列から得られる「都合のいい」基底を得ることが出来る。

定義 4.2. [2] K を体とし，$\mathrm{J}(m, n)$ を ジョンソン・スキーム とし，s_i を $\mathrm{J}(m, n)$ の関係 $(0 \leq i \leq n)$ と置き、A_i を s_i の隣接行列とする。この時,

$$C_i := \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} A_{n-k}$$

と定めると $\{C_i | 0 \leq i \leq n\}$ は $\mathrm{J}(m, n)$ の K 上の隣接代数 (以下 $K \cdot \mathrm{J}(m, n)$ と表す) の K-基底である。特に C_n が $F \cdot \mathrm{J}(m, n)$ の単位元となっていることに注意する。

命題 4.3. [2] $C_0, C_1, \cdots, C_n$ の積は以下のように定まる。

$$C_r C_s = \sum_{t=0}^{\min\{r,s\}} \binom{n-t}{r-t} \binom{n-t}{s-t} \binom{m-r-s}{m-n-t} C_t$$

命題 4.4. [2] A_i は C_i を用いて以下のように書くことが出来る。

$$A_i = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{i-n+r} \binom{r}{n-i} C_r$$

命題 4.5. [2] ジョンソン・スキーム　$\mathrm{J}(m,n)$ の指標表 P の (i,j)-成分は以下のように書ける。

$$P_i(j) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k} \binom{m-n-i}{j-k}$$

5　主結果

この章では,

- p を素数とし、F を標数 p となる有限体とする。
- R を有限次元 F-代数とし、$\{C_i | 0 \leq i \leq d\}$ を F-基底とする。この時 R を t 個 F 上テンソルしたもの、即ち $\underbrace{R \otimes_F \cdots \otimes_F R}_{t}$ を $R^{\otimes t}$ と書く。この時、$R^{\otimes t}$ の基底は $\{C_{i_1} \otimes C_{i_2} \otimes \cdots \otimes C_{i_t} | 0 \leq i_j \leq d \ (j = 1, \cdots, t)\}$ となる。

とする。これから主定理と証明を紹介する。証明の方は概略である。

定理 5.1. p を素数とし、 t を自然数とする。この時以下が成立する。

$$F \cdot \mathrm{J}(2(p^t - 1), p^t - 1) \cong F \cdot \mathrm{J}(2(p-1), p-1)^{\otimes t}$$

Proof. $C_{ip+\alpha}^{[p^k-1]} (0 \leq i \leq p^{k-1} - 1,\ 0 \leq \alpha < p)$ を $F_p \cdot \mathrm{J}(2(p^k - 1), p^k - 1)$ の基底とする。この時, F -線形写像 φ を

$$\varphi : F \cdot \mathrm{J}(2(p^t - 1), p^t - 1) \to F \cdot \mathrm{J}(2(p-1), p-1)^{\otimes t}$$
$$\left(C_{ip+\alpha}^{[p^t-1]} \mapsto C_i^{[p^{t-1}-1]} \otimes C_\alpha^{[p-1]} \right)$$

と定める。φ が多元環上の同型写像になっていることを示せばよい。この写像 φ が多元環準同型であることを示すために冒頭の定理 2.2 を用いる。　□

定理 5.2. m を自然数, $0 \leq n \leq \frac{m}{2}$ とし, $\{C_i | 0 \leq i \leq n\}$ を　$F \cdot \mathrm{J}(m,n)$ の基底, $\{C'_j | 0 \leq j \leq n-1\}$ を　$F \cdot \mathrm{J}(m-2, n-1)$ の基底とする。この時, f を,

$$f : F \cdot \mathrm{J}(m,n) \to F \cdot \mathrm{J}(m-2, n-1) \left(C_i \mapsto \begin{cases} C'_{i-1} & (1 \leq i \leq n) \\ 0 & (i = 0) \end{cases} \right) \ (F\text{-線形写像})$$

と定めると f は 全射多元環準同型写像 となる。

Proof. 任意の i,j に対して

- $f(C_i + C_j) = f(C_i) + f(C_j)$
- $f(C_n) = C'_{n-1}$
- $f(C_iC_j) = f(C_i)f(C_j)$

を示せば十分である。 □

定理 5.3. ジョンソン・スキーム $\mathrm{J}(m,n)$ を考える。 $p^l > n$ とすると，

$$F \cdot \mathrm{J}(m,n) = F \cdot \mathrm{J}(m + p^l, n)$$

が言える。

Proof. $\{C_j | 0 \leq j \leq n\}$ を $F \cdot \mathrm{J}(m,n)$ の基底, $\{C'_j | 0 \leq j \leq n\}$ を $F \cdot \mathrm{J}(m + p^l, n)$ の基底とする。 g を

$$g : F \cdot \mathrm{J}(m,n) \to F \cdot \mathrm{J}(m + p^l, n) \begin{pmatrix} C_j \mapsto C'_j \\ x \mapsto x \end{pmatrix} \ (F\text{-線形写像})$$

と定め, g が多元環同型写像であることを示せばよい。g が多元環準同型しゃぞうであることを示すために定理 2.2 を用いる。 □

参考文献

[1] Peter J. Cameron. *Combinatorics: topics, techniques, algorithms.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. *Philips Res. Rep. Suppl.*, (10):vi+97, 1973.