実二次体の類数に関するByeonの結果についての注意

伊東 杏希子 (名古屋大学大学院 多元数理科学研究科)

代数的整数論の重要なキーワードの一つにイデアル類群がある. イデアル類群は代数体ごとに決まる群であり, その位数 (類数という) が有限であることが知られている. 代数体の類数に関する考察テーマは数多くあるが, 本講演では主に, 実二次体の類数の非可除性に関する Byeon の結果についての Remark を報告する.

与えられた素数 l に対して, 類数が l で割れない実二次体は無限に存在する (虚二次体についても同様の主張が成り立つ). 特に $l = 3$ の場合には, 類数が 3 で割れない実二次体は無限に存在することだけでなく, 正の下極限密度を持つことも知られている (虚二次体についても同様の主張が成り立つ). 類数が 3 で割れない実二次体について, Byeon により次が示されている.

定理 1. (Byeon, 2004). *t を square-free な整数とする. 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{tD})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つ.*

二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数が 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことがDavenport-Heilbronn, 中川-堀江氏の結果から分かる. 二次体のイデアル類群の 3-rank に関して知られている Scholz 不等式をこの結果に組み合わせることで, 二次体の基本判別式 $D > 0$ のうち, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ の類数がともに 3 で割れないものが無限に存在し, さらに正の下極限密度を持つことが言える. Byeon の結果はこの事実の一般化と見ることができる.

定理 1 に対して, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$ の三つの実二次体の組 (ただし, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ は square-free な奇数でかつ $t_1 \neq t_2$ を満たす) についても同様の結果が得られるかという考察に取り組んだので, その内容について紹介する. さらに, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$ での 3 の分解の仕方を考えることにより, 岩澤不変量がすべて 0 となる実二次体の組 ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_1D})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{t_2D})$) が無限に存在し, 正の下極限密度を持つことについても触れたい.